

複素 3 次関数写像のランダム性の解析 (その 2)

國 末 浩

The Analysis of Randomness of the 3rd Order Fractal Complex Mapping — Part 2 —

Hirosi KUNISUE

キーワード：フラクタル，複素関数，カタストロフィー，カオス

概 要

複素 3 次関数 $f(Z) = Z^3 + aZ + C$ のフラクタル写像で生じるストレンジ・アトラクタの部分の構造解析をおこなった。 C は複素数で実数部分は -3.25 から $+3.25$ まで，虚数部分は -2.29 から $+2.30$ までそれぞれ $+0.01$ 間隔で変化させた。写像結果を図形表示するために繰り返しの回数，繰り返しを抜けたときの絶対値等を色情報として処理した。この写像のアトラクタの部分詳しく調べるために，色情報を用いて定義した関数が $a = -0.2$ と $a = -0.4$ の周辺でカオスの状態を示すことが確認できていたので，それら近辺の関数の変動の様子を調べた。 a の値を -0.01 間隔で変化させた。この関数がカオスの状態を示す a の値と，カオスの状態が周期的に変化する a の範囲が確認された。

1. はじめに

繰り返し写像であるフラクタル写像¹⁾に現れるアトラクタ^{2,3)}部分の性質を詳しく調べることによって、突然変化するとかランダムでありながら結果として定常性を保つというような自然界の複雑な現象を解明しようとする研究が多くなされている^{2,4)}。

フラクタル写像として 3 次の複素関数 $f(Z) = Z^3 + aZ + C$ を採用した。 a は実数係数であり写像が x 軸および y 軸に対して対象となるように初期値の複素数 C の値を変化させた。パラメータ a 値に対する写像は、 $Z_{\text{new}} = Z^3 + aZ + C$ を 1 ループとし、1 ループごとに Z_{new} の絶対値を求め、設定した最大値または最小値の範囲を越えたときのループの回数、および一定のループ回数の計算をおこなっても設定した極大値または極小値を越えない場合は、ループを抜け出たときの数値によって初期値 C に対応するアトラクタの特性を 8 色に色分けし、 C に対応する複素平面上の点にプロットした。その写像から 2 つのタイプの関数を定義した。前回、それらの関数のランダム性についての解析結果

を報告した⁵⁾。その結果、色情報から作った関数でパラメータ a の値が -0.2 と -0.4 の付近でディメンジョンが 3 に近くなり、カオスの様子を示すことが確認できた。今回は、その付近における関数の様子をパラメータ a の値を細かく変化させて検討した。

この論文の目的は繰り返し写像のランダム性を解析することであり、この研究の最終的な目的としてこれらの関数を我々が日常経験する不連続な現象や現実と空想による心理作用などに適用して、その解析結果からこれらの関数が応用できる自然現象を捜し出して解明することにある。

2. 研究方法

1) フラクタル写像と定義関数

複素 3 次関数の定数 a の値は -0.195 から -0.204 および -0.395 から -0.405 まで 0.001 間隔で変化させた。初期値の複素数 $C = x + iy$ の実数部分は -3.24 から $+3.24$ まで，虚数部分は -2.29 から $+2.30$ までそれぞれ 0.01 の間隔で変化させた。最大値および最小値はそれぞれ 1.0×10^9 ， 1.0×10^{-9} に設定した。最大値を越える繰り返しの回数は 100 回以内であったが，最小値の方は 5,000 回を越えてもその値を越えなかったため，繰り返しの上限を 500 回とした。複素平面の座標を x ， y とし、最大値を越えた時は、繰り返しの回数 $V(x, y)$

(平成 11 年 9 月 9 日受理)

川崎医療短期大学 一般教養

Department of General Education, Kawasaki College of Allied Health Professions

および V を 6 で割った剰余数に 1 を加えた値を色情報 $C(x, y)$ として記録した. 500 回繰り返しても最小値を越えない時は, $V(x, y) = 5$ とし, Z_{new} の絶対値に 10^4 を掛けた値を 6 で割った剰余数に 1 を加えた値を色情報 $C(x, y)$ として記録した.

図 1 に表示した結果は $a = -0.2$ の場合の写像であり, 図 2 に表示した結果は定数 $a = -0.4$ の場合の写像である. 色情報をそのまま表示してある.

図 1, 図 2 に示した写像を用いて定義した関数は

$$\begin{aligned} (\text{関数 } ABZC) : ZC(k) &= \sum_{M=0}^{M=200} C(M \cos ka_L, M \sin ka_L) \\ ABZC(k) &= |ZC(k)| \end{aligned}$$

であり, ループを抜け出した時の色情報をもとにした. M は中心からの動径の大きさに, k は x 軸からの角度にそれぞれ対応している. π の値は 3.1415 とした.

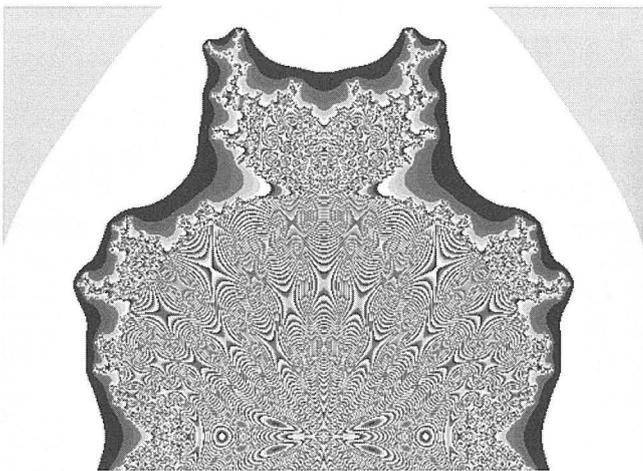


図 1 $a = -0.2$ の色情報による写像

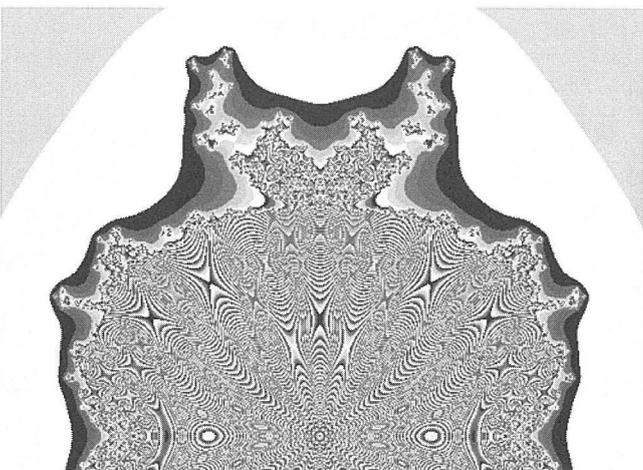


図 2 $a = -0.4$ の色情報による写像

2) 関数の解析

先に定義した関数についての解析は, 写像の対象性から 1 つの象限のみで行った. k の値は 0 から $90 \times L$ までの整数とし, L の値は 1 とした.

図 3 は a の値が -0.195 から -0.204 までの関数のグラフを, 図 4 は a の値が -0.395 から -0.404 までの関数のグラフをそれぞれ一覧に表したものである.

グラフで表された各関数の値は, それぞれ図 3 では $721 < ABZC(k) < 891$, 図 4 では $737 < ABZC(k) < 890$ の範囲にある.

a の各値に対応する関数について極大点の数 P を数え, デイメンジョン D を

$$D = (90 + 1) / P$$

で算出した. さらに極大点の間隔の度数分布を求め, その平均値 M を算出した.

算出した D および M の値をそれぞれ表 1, 表 2 に, それらの変動の様子をそれぞれ図 5, 図 6 に示し

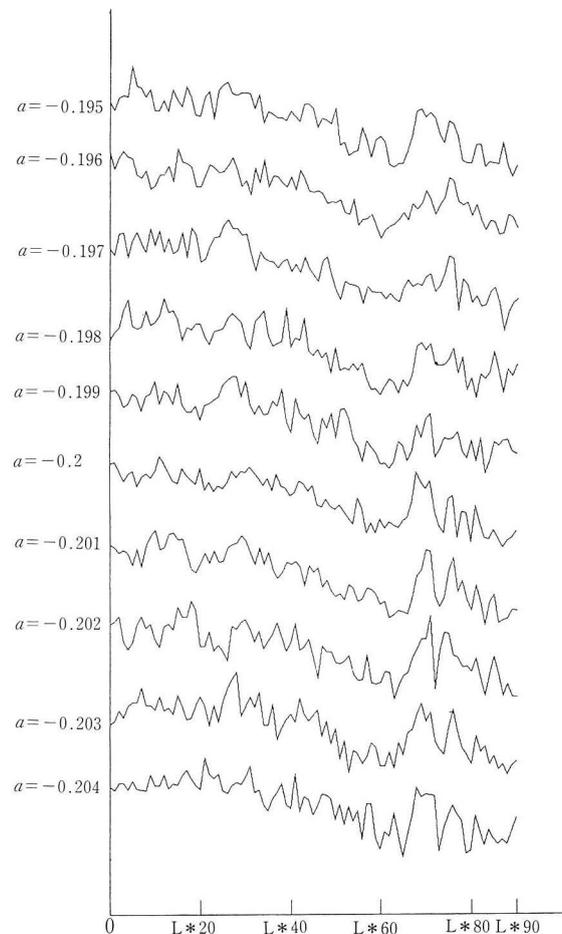


図 3 関数 $ABZC$ のグラフ

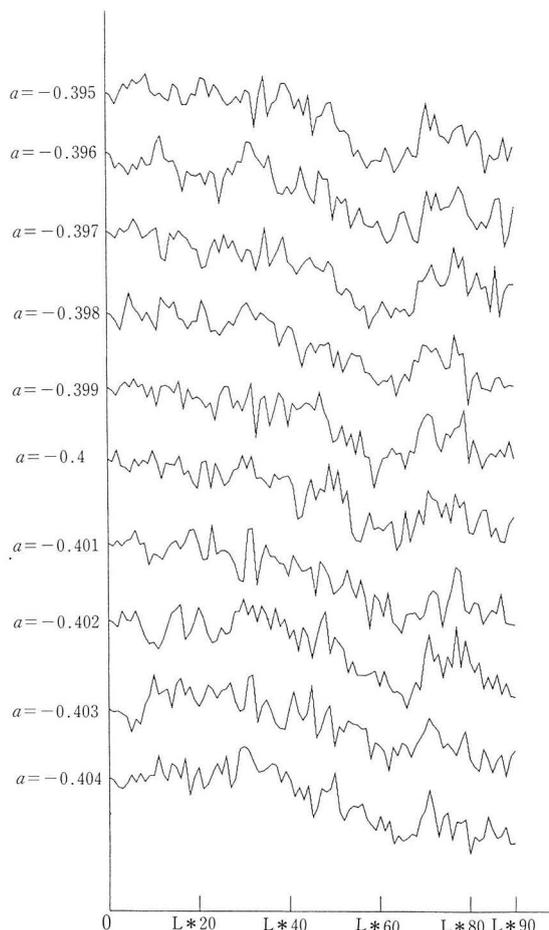


図4 関数 ABZC のグラフ

た. また, 変数 n の関数値 $X(n)$ と $X(n+1)$, $X(n)$ と $X(n+2)$ および $X(n)$ と $X(n+3)$ の関数値の間の相関係数と回帰直線の傾きを最小2乗法で求めた. 図7にパラメーター a の値が -0.2 付近に対する数値計算結果を, 図8 a の値が -0.4 付近に対する数値計算結果をそれぞれグラフで示した.

3. 結 果

これらを調べた結果から, 関数について次のことが分かった.

図1の写像と図2の写像では発散する場所の様相が異なることはすでに報告したが, 収束しない場所でのパターンと色情報も異なる.

関数 ABZC グラフの変化を記した図3, 図4よりいずれにおいても $k=40$ までは水平の傾向があり, $k=40$ から $k=60$ の間では右下がりの傾向がある.

いずれにおいても $k=60$ から 85 の間に最小値があり, またこの範囲で最大値と最小値の差が最も大きい.

表1 関数 ABZC : パラメーター a の次元 D と極大間の平均間隔 M

a	-0.204	-0.203	-0.202	-0.201	-0.2	-0.199	-0.198	-0.197	-0.196	-0.195
D	3.25	3.79	3.14	4.14	3.14	3.13	3.50	3.79	3.64	3.65
M	3.22	3.74	3.11	4.10	3.04	3.14	3.52	3.70	3.58	3.63

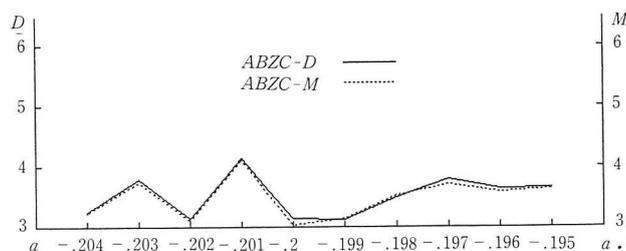


図5 パラメーター a と次元 D , 極大間の平均間隔 M

表2 関数 ABZC : パラメーター a の次元 D と極大間の平均間隔 M

a	-0.404	-0.403	-0.402	-0.401	-0.4	-0.399	-0.389	-0.397	-0.396	-0.395
D	3.64	3.25	3.79	3.50	3.37	3.50	3.37	3.79	3.64	4.33
M	3.58	3.19	3.78	3.52	3.23	3.48	3.35	3.65	3.63	4.30

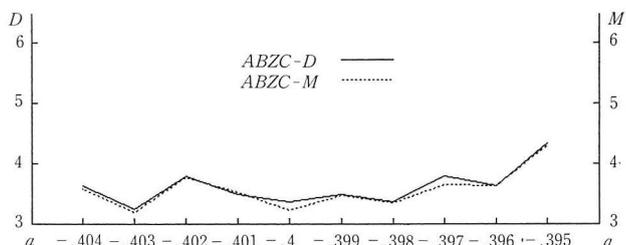


図6 パラメーター a と次元 D , 極大間の平均間隔 M

図3では $a = -0.199, -0.2, -0.202, -0.204$ の各値のとき極大値の数が多くなっている.

図4では $a = -0.398, -0.403, -0.404$ の値のとき極大値の数が多くなっている.

パラメータ a と次元 D , 極大間の平均値 M の表1, 表2およびグラフ図5, 図6より

図5, 図6のいずれにおいても D, M とともに振動する変動がみられる.

表1および図5では

$a = -0.199, -0.2, -0.202, -0.204$ の各値のとき D, M とともに3に近い値である.

$a = -0.197, -0.2$ の値のところで D と M の値に差がでている.

表2および図6では

$a = -0.4$ の値のとき D が, $a = -0.403$ の値のとき

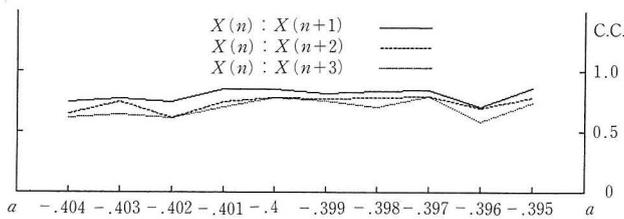


図7 関数 ABZC : パラメーター a と離散点間の相関係数

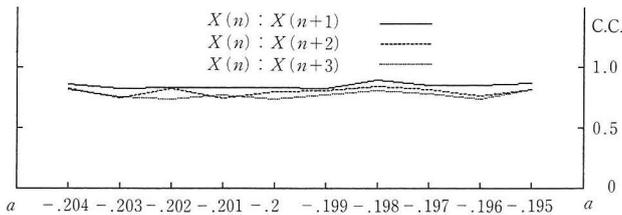


図8 関数 ABZC : パラメーター a と離散点間の相関係数

D , M とともに 3 に近い値である.

$a = -0.397, -0.4$ の値のところで D と M の値に差がでている.

パラメーター a と離散点間の相関係数のグラフ図 7, 図 8 より

$-0.195 < a < -0.204$ では相関の度合いがいずれも 0.74 から 0.89 の間にある. $a = -0.2$ と $a = -0.203$ の間で, 2 離れた点の間の相関係数に変動がある.

$-0.395 < a < -0.404$ では相関の度合いが 0.58 から 0.85 の間にある. $-0.395 < a < -0.399$ で, 3 離れた点の間の相関係数は振動の様子を示しており, $a = -0.396$ のところで最小値 0.58 である. 相隣あう点の間の相関係数も $a = -0.396$ のところで最小値 0.70 である. 2 離れた点の間の相関係数は $a = -0.402$ のところで, 最小

値 0.64 である.

4. 結 語

写像の色情報を用いて定義した関数で, a の値を 0.1 間隔で調べて報告した結果⁵⁾から, カオスの状態を呈するとみられる a の値の前後を 0.01 間隔で調べたところ, カオスの状態が $a = -0.199, -0.2, -0.202, -0.204, -0.4, -0.403$ であり, 周期的に変動する範囲が $-0.2 < a < -0.204$ であることが確認できた. どの関数も, $40 < k < 60$ の範囲では右下がりの傾向があり, また $60 < k < 85$ の範囲で最大値と最小値の差が最大になっているが, いずれもカオスの状態との関連は特に認められなかった. 2 離れた点の間の相関係数はカオスの状態となる a の値のところで大きくなっていることが分かった.

$a = -0.199, -0.2$ と連続してカオスの状態が示されているので, この間を細分して調べることを今後の課題としたい. また, カオスの状態が振動していることの詳細を, 写像や初等カタストロフィー関数等を用いて調べることも今後の課題としたい.

文 献

- 1) ベンワー B・マンデルブロ著, 広中平祐監訳: 「フラクタル幾何学」, 東京: 日経サイエンス社, 193-199, 1985.
- 2) 野口 広: 「カタストロフィーの理論」, 東京: 講談社, 92-112, 1973.
- 3) J・グリック, 大貫昌子訳: 「カオス (新しい科学をつくる)」, 東京: 新潮文庫, 209-267, 1991.
- 4) 寺本 英, 広田良吾, 武者利光, 山口昌哉: 「無限・カオス・ゆらぎ」, 東京: 培風館, 1-28, 1993.
- 5) 國末 浩: 複素 3 次関数写像のランダム性の解析, 川崎医療短期大学紀要 18: 1-9.